RUPC 2019 Day 3
G 問題
- Donuts Orientation -

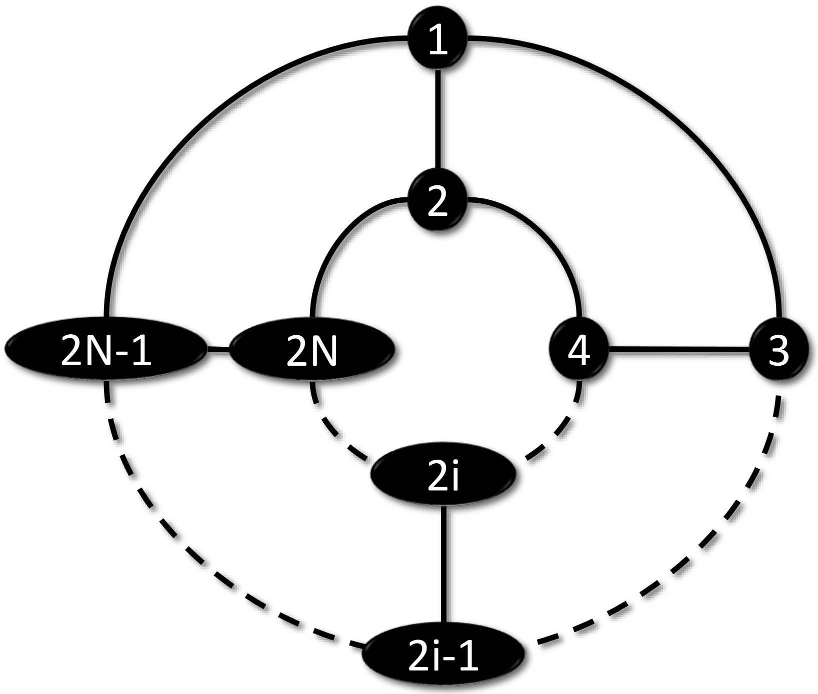
原案 : tsukasa_diary

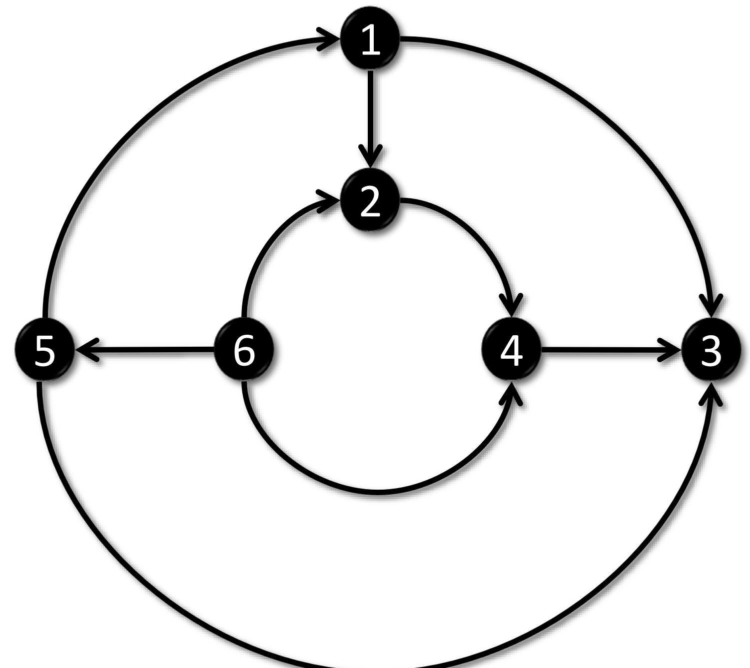
問題文 : tsuta_j

解説 : tsukasa_diary

問題

$2N$頂点のドーナツ型無向グラフが与えられる。各辺に向き付けするとき、閉路ができない向き付けは何通りあるか。($N \leq 1000$, 答えは素数Mで剰余を取る)

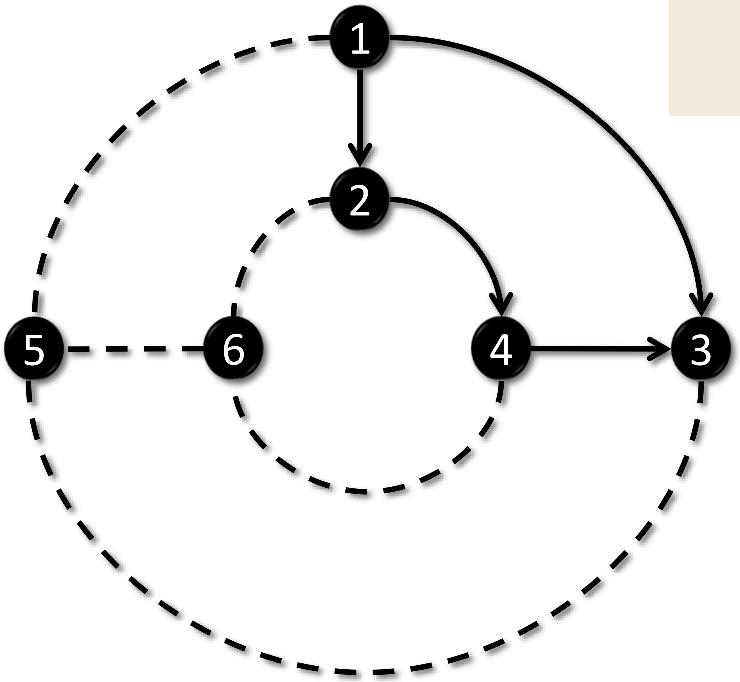




基本的なアルゴリズム

メモ化再帰
- 各辺を順に向き付けていく
- 頂点の推移閉包をメモ

rec(i, cur): // 辺 $\{u_i, v_i\}$ に向き付けする
  if (閉路を検出) return 0
  if ($i = last$) return 1
  if ($[i, cur]$ がメモ済み) return $memo[i, cur]$
  $nxt_1 \leftarrow addArc(cur, u_i \rightarrow v_i)$
  $nxt_2 \leftarrow addArc(cur, v_i \rightarrow u_i)$
  $memo[i, cur]$ ←(rec(i+1, nxt_1) + rec(i+1, nxt_2))%M
  return $memo[i, cur]$



s/t	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

0: sからtへ推移不可能　1: sからtへ推移可能

明らかな問題点

頂点数が$2N$だから推移閉包のサイズが$4N^2$

- 推移閉包の種類数は$O\left(2^{N^2}\right)$
- 総計算量は$O\left(N^3 2^{N^2}\right)$

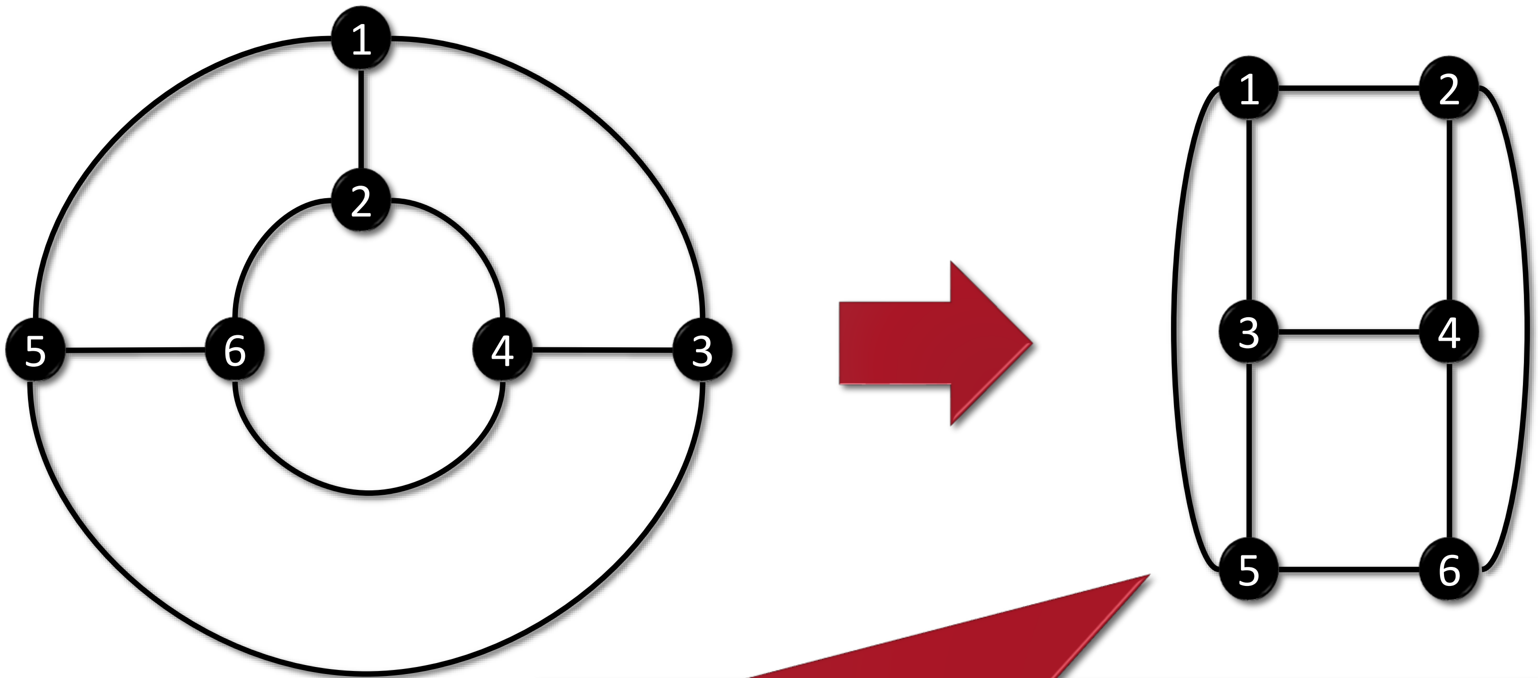
s/t	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

これをメモするのは
非現実的

0: sからtへ推移不可能　1: sからtへ推移可能

考察の前準備

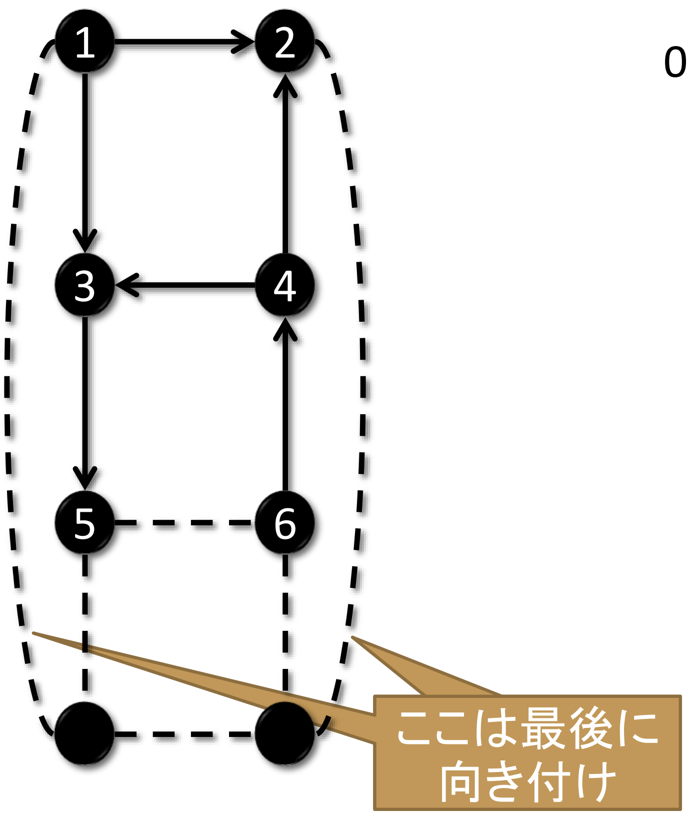
とりあえずグラフを見やすい形に描きなおす



梯子（幅2のグリッド）の上下がくっついただけ

重要な考察

上の辺から順に向き付けるとき、向き付けが完了した領域の四隅頂点以外の推移関係は無視してよい



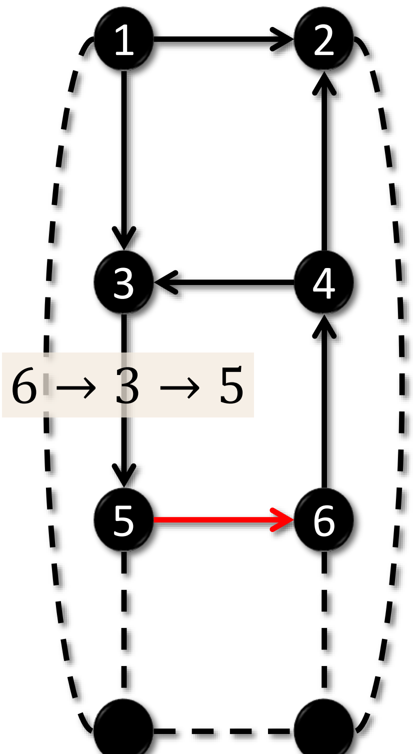
0: sからtへ推移不可能　1: sからtへ推移可能

s/t	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	1	1	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	1	1	0

無視

重要な考察

上の辺から順に向き付けるとき、向き付けが完了した領域の四隅頂点以外の推移関係は無視してよい



なぜ？

- 四隅頂点の集合を Fとする
- サイクル検出について
  - ある頂点 $v \notin F$ について、辺(x, y)を向き付けして v を含むサイクルができるとき、必ず $x, y \in F$ であって $y \to v \to x$という推移関係がある
  - しかし、$y \to v \to x$ から $y \to x$ という推移関係が導かれるので、v を無視しても正しくサイクル検出可能
- 推移関係の更新についても同様に議論可能

想定解法まとめ

四隅頂点に関する推移閉包を管理するメモ化再帰

- 計算量は $O(N \times 4^2 \times \text{推移閉包の種類数})$
- 4頂点の推移閉包の種類数は 3994（参考：OEIS A006905）

推移閉包の管理が強実装

- 四隅が動くので行と列が目まぐるしく変わる
- よく考えると以下の 3 操作でうまく実現できる
  - ワーシャル・フロイド的に更新する (辺追加は3乗でなく2乗でできます)
  - ある行を全部 0 にする
  - ある列を全部 0 にする

詳細は割愛

Writer Solutions / Statistics

Writer Solutions

- tsukasa_diary: 85 lines, 2654 bytes in C++
- tsuta_j: 133 lines, 3718 bytes in C++

Acceptance / Submission

- 80 % (4/5)

First Acceptance

- On-site: rupc_ohauku (162 min)
- On-line: rickytheta (133 min)