立命合宿 2019 Day3 F 問題
赤黒そーるじぇむ (Red Black Soul Gem)

原案: tsutaj
問題文: tsukasa_diary
解答: tsutaj・tsukasa_diary
解説: tsutaj

2019 年 3 月 7 日

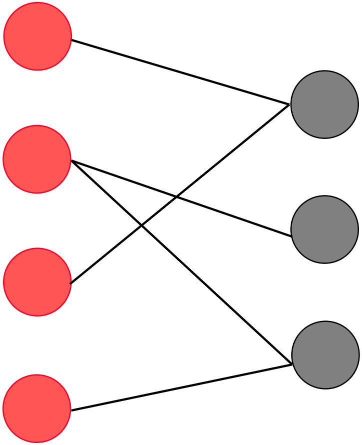
問題

赤黒そーるじぇむ (Red Black Soul Gem)

- 以下を全て満たす N 頂点のグラフの総数を数え上げ、M で割った余りを求める
  - 各頂点は赤か黒のどちらかで塗られている
  - 赤で塗られた頂点それぞれについて、黒で塗られた頂点の少なくとも 1 つと直接繋がっている
  - 黒で塗られた頂点それぞれについて、赤で塗られた頂点の少なくとも 1 つと直接繋がっている
- 制約
  - $1 \leq N \leq 2000$
  - $10^8 \leq M \leq 10^9 + 7$
  - M は素数

問題

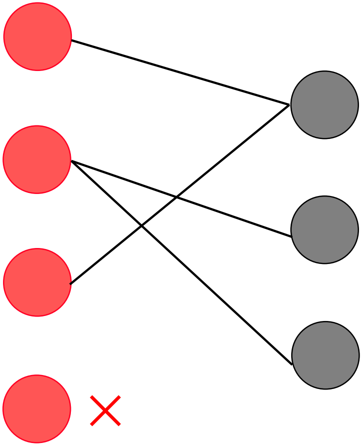
条件を満たすグラフの例



問題

条件を満たさないグラフの例

- どの黒い頂点とも直接繋がらない赤い頂点が存在



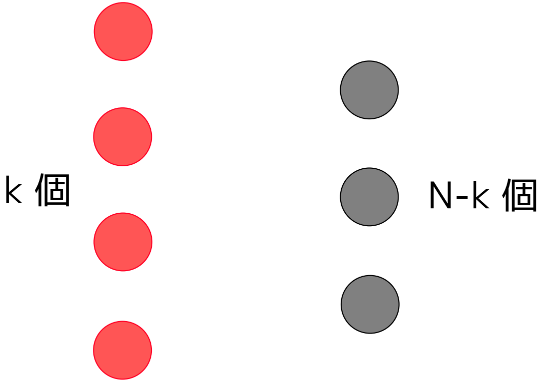
想定誤解法

TLE 解法: 動的計画法

- $\mathrm{dp}[i][j][k][l]$ (以下の状態を管理)
  - i 番目の頂点まで考慮したとき
  - 黒く塗った頂点が j 個あり
  - 条件を満たさない (赤い頂点と全く繋がらない) 黒い頂点が k 個あり
  - 条件を満たさない (黒い頂点と全く繋がらない) 赤い頂点が l 個ある
- 答えは $\sum_{j=1}^{N-1} \mathrm{dp}[N][j][0][0]$
- $O(N^5)$ なので当然間に合いません

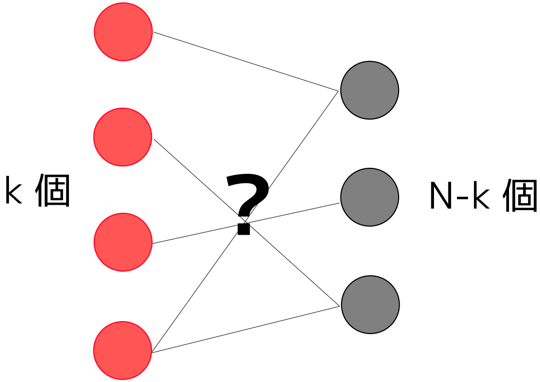
アプローチ

- 頂点を k 個と $N-k$ 個のふたつに分け、それぞれ赤・黒で塗る
- N 個のうち、具体的にどの k 個を選ぶか: ${}_N C_k$ 通り
- 赤い頂点同士の接続パターン: $2^{\frac{k(k-1)}{2}}$ 通り
- 黒い頂点同士の接続パターン: $2^{\frac{(N-k)(N-k-1)}{2}}$ 通り



アプローチ

- 赤い頂点集合と黒い頂点集合の間の接続パターンは、どのようにして数えるか？

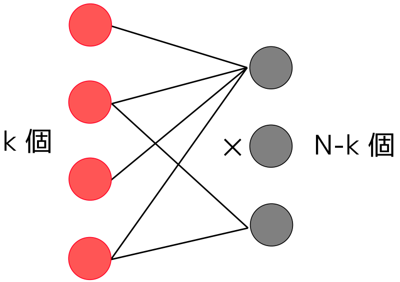


アプローチ

- 「条件を満たさない」接続パターンを考えてみる
  - $P_x :=$ 黒い頂点のうち少なくとも x 個が、どの赤い頂点とも繋がらないパターンの集合 とすると、以下のように書ける
  - (条件を満たさないパターン) $= P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_{N-k}$
  - 和集合の数え上げなので、包除原理が利用できそう

アプローチ

- 黒い頂点のうち x 個を絶対に赤い頂点と繋げないことにする
- 赤い頂点は少なくとも 1 つの黒い頂点と繋げることにする
- このような接続パターン数 $|P_x|$ は容易に数え上げられる
- さらに、絶対に繋げない頂点の個数さえ同じであれば場合の数は同じである (対称性) から、個数 x だけ考慮すればよい



絶対に繋がないところが x 個あるならば、
$(2^{N-k-x}-1)^k$ 通りの繋ぎ方が考えられる

アプローチ

想定解法まとめ

- N 個の頂点を k 個・$N-k$ 個 という 2 つの頂点集合に分ける
- 黒い頂点に関して、赤い頂点と絶対に繋げない個数を決め打ちして場合の数を求める
- 求めたい場合の数は包除原理によって求めることができる

- 計算量 $O(N^2)$
  - 少しサボると $O(N^2 \log N)$ になりますがこれでも間に合うはず

Writer 解・統計

- Writer 解
  - tsutaj (C++・86 行・2030 bytes)
  - tsukasa_diary (C++・56 行・1128 bytes)
  - monkukui (C++・58 行・1288 bytes)
- 統計
  - AC / tried: 13 / 17 (76.5 %)
  - First AC
    - On-site: rupc_homu_aishiteru (20 min 25 sec)
    - On-line: xxymdxx (77 min 22 sec)