E問題-バイナリ列-

Binary Sequence

原案：鈴木

問題文：鈴木

解答：鈴木，栗田，杉江，井上

解説スライド：鈴木

問題概要

- 0と1からなる長さnの列$x = (x_1 \dots x_n)$が与えられる
- このような列に対する2つの関数f, gがある
  - $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$
  - $g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$
- q回のクエリを処理
  - l_i, r_i, b_i : $x_{l_i} \dots x_{r_i}$をすべてb_iに変更
  - $f(x) - g(x)$を求めよ

- $2 \le n \le 100{,}000$

考察

- $f(x)$：赤線部分の和に対応
- $g(x)$：青線部分の和に対応

$$x = 00111111000001111100001110$$

- 赤線と青線の差分は1
- つまりよく考えると$f(x) - g(x)$は1だけからなる区間の個数

想定解法

- Set類のデータ構造（挿入・削除が$O(\log n)$）を用いた区間集合の管理
  - 1が連続する区間それぞれについて，［開始位置, 終了位置］を持つ

$$x = 0011101100011110 \rightarrow \{[3,5],[7,8],[12,15]\}$$

$$l_1 = 4, r_1 = 9, b_1 = 1$$

$$x = 0011111110011110 \rightarrow \{[3,9],[12,15]\}$$

$$l_2 = 13\ r_2 = 14, b_2 = 0$$

$$x = 0011111110010010 \rightarrow \{[3,9],[12,12],[15,15]\}$$

区間集合の更新

- $x < l_i \le r_i < y$である区間$[x, y]$がある
    - $b_i = 0 \Rightarrow [x, l_i - 1]$と$[r_i + 1, y]$を挿入し$[x, y]$を削除
    - $b_i = 1 \Rightarrow$何もしない
- $l_i \le x \le y \le r_i$である（$[l_i, r_i]$に包含される）区間$[x, y]$を削除
- $b_i = 1$のとき
    - $l_i < x \le r_i < y$である区間$[x, y]$がある ⇒ $r_i = y$に更新し$[x, y]$を削除
    - $x < l_i \le y < r_i$である区間$[x, y]$がある ⇒ $l_i = x$に更新し$[x, y]$を削除
    - $[l_i, r_i]$を挿入
- $b_i = 0$のとき
    - $l_i < x \le r_i < y$である区間$[x, y]$がある ⇒ $[r_i + 1, y]$を挿入し$[x, y]$を削除
    - $x < l_i \le y < r_i$である区間$[x, y]$がある ⇒ $[x, l_i - 1]$を挿入し$[x, y]$を削除

計算量

- Q. 各クエリごとにSetで複数の区間を削除・挿入していたらTLEしそうでは？
  A. しません。

- 1度のクエリで新たに生成される区間の数は定数個
  - $b_i = 1$のとき
    - 010000 → 010110のように素直に1個増えるか
    - 100111 → 111111のように元ある区間をまたいで1つの区間になるか
  - $b_i = 0$のとき
    - 011111 → 011001のように元ある区間が2つの区間に分裂するか
    - 0011100 → 0000100のように元ある区間が狭まるか（多くても左端と右端で2つ）
- 挿入は$O(n+q)$回 ⇒ 削除も$O(n+q)$回しかない ⇒ 全体で$O((n+q)\log n)$

別解①

- $x'_i = x_i x_{i+1}$, $x'_n = 0$であるような列x'を作ると$g(x) = f(x')$

- クエリ毎に
  1. x'の区間$[l_i, r_i]$をb_iで更新
  2. $b_i = 1$のとき
     - $x_{l_i-1} = 1 \Rightarrow x'_{l_i-1} = 1$
     - $x_{r_i+1} = 0 \Rightarrow x'_{r_i+1} = 0$
  3. $b_i = 0$のとき
     - $x_{l_i-1} = 1 \Rightarrow x_{l_i-1} = 0$
  4. xの区間$[l_i, r_i]$をb_iで更新
  5. $f(x) - f(x')$を出力

- 列yに対する区間更新と$f(y)$の計算が$O(\log n)$で可能なSegment Treeを用いて$O((n+q)\log n)$

別解②

- 平方分割 $O(n\sqrt{n})$
- 詳しくは述べません