RUPC2016 Day3
G: Destiny Draw

運命力

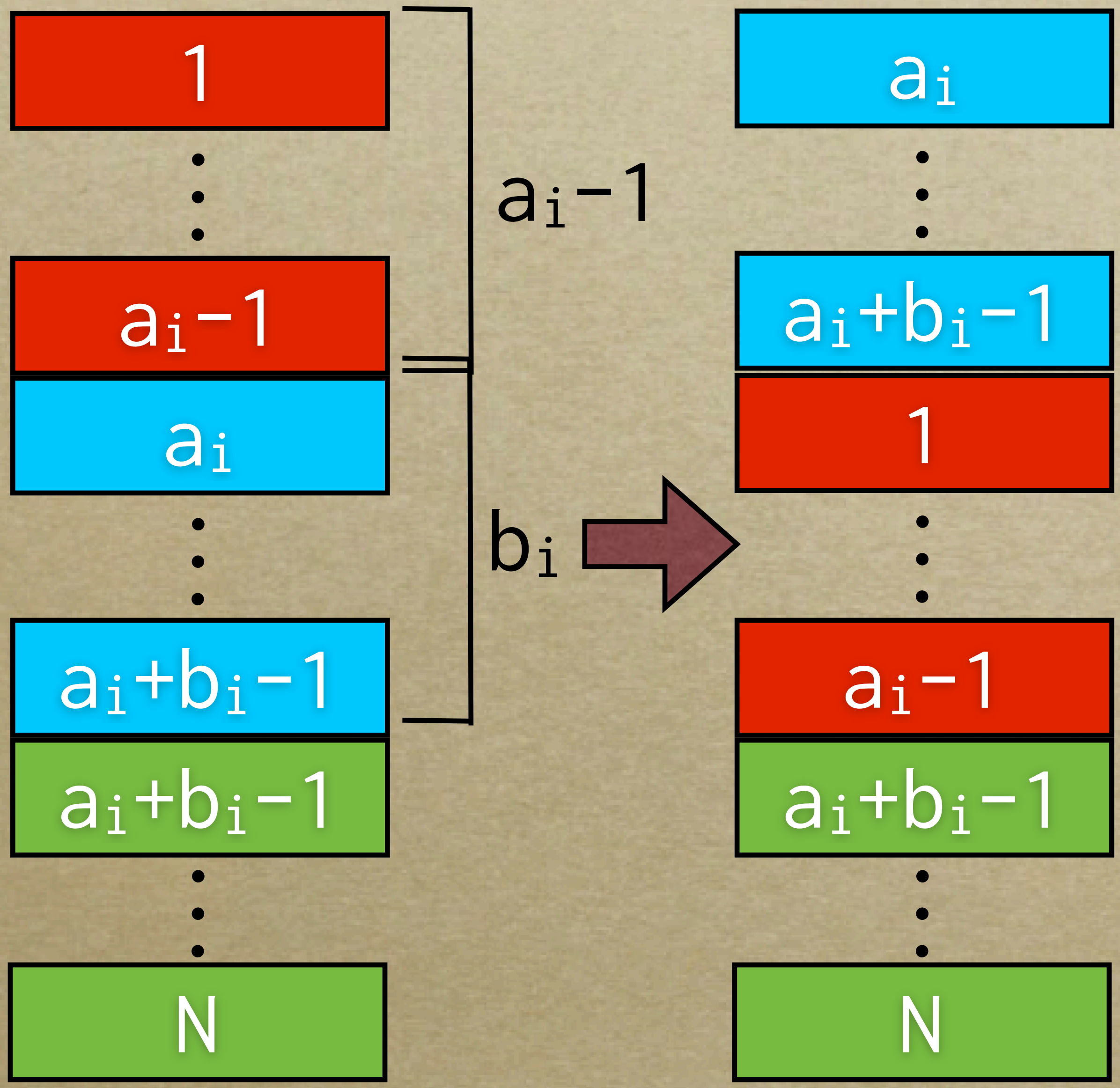
原案：井上
解説：井上
問題文：井上
解答：井上、栗田

問題概要

- 上から順に 1 ~ N の番号がついているカードの山がある
- K 種類のシャッフルが可能である
  - K種類のうちi番目のシャッフルでは上からa_i枚目からb_i枚を抜き、上に重ねる。
  - シャッフルはそれぞれ t_i 秒を要する。
- ちょうど T 秒のシャッフルの後、一番上のカードを C にする方法は何通りあるか。10^9+7で割った余りを出力せよ。
- 制約： 2 ≦ N ≦ 40, 1≦6 K ≦ N(N+1)/2, 1≦ t_i ≦5, 1≦ T ≦ 10

問題概要

i番目のシャッフル



TLE解法(1)

- 全探索
  - 今t秒経過しているとすると、k番目のシャッフルによって時間は$t+t_k$になる
  - 各時点での山札の状態を記憶しながらシミュレーションしていき、時間がTになったときに一番上がCなら答えをインクリメント
- 各時点で選択肢がK+1通りあり、シャッフルのシミュレーションにO(N)かかる。分岐の深さは最大Tなので、$O(NK^T)$

TLE解法(2)

- 最初C枚目にあった札が時刻tでどこにあるかだけわかればよい = DP
  - dp[t][p]: C枚目のカードが時刻tにおいて上からp枚目にある
- i番目のシャッフルをシミュレートすると、シャッフル前のx_i枚目がシャッフル後y_iに行くという情報が得られる
  - $dp[t+t_i][y_i]$ += $dp[t][x_i]$
- dpの計算時にシャッフルをシミュレートするとO(N)となるが、前処理でシミュレートすればO(1)にできる。全体でO(KNT)

TLE解法(3)

- シャッフルのシミュレーション結果は順列になるので、これの順列行列を考える
- 順列行列は遷移関係を表しているので、有向グラフの隣接行列とみなせる
- 同じt_iの行列をまとめてしまってもよい

順列行列のマージ

N=6

a=3,b=2,t=1

(3 4 1 2 5 6)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

a=1,b=3,t=3

(1 2 3 4 5 6)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

a=2,b=1,t=3

(2 1 3 4 5 6)

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

a=4,b=3,t=1

(4 5 6 1 2 3)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

t=1

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

t=3

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

TLE解法(3)

- この行列をTLE解法(2)のDPに応用すると $O(\max(t_i)N^2T)$ → まだ少し大きい

想定解法

- この行列をTLE解法(2)のDPに応用すると$O(\max(t_i)N^2T)$ → まだ少し大きい
- dpを拡張する
  - dp[t][v][p]: 初期にv枚目にあった札が時刻tにおいてp枚目にある
- こうすると、遷移は行列積を用いて書ける(隣接行列の積がkステップで行けるところを表すのと同じ)

解法(4)

- 漸化式を明示すると以下のようになる
  - dp[i] = A_1×dp[i-1] + A_2×dp[i-2] + A_3×dp[i-3] + A_4×dp[i-4] + A_5×dp[i-5]
  - A_{ti}は先述の時刻t_i毎にまとめた順列行列
- 行列の5項間漸化式になったので、行列の行列を作って行列累乗のテクニックを用いる
  - 行列サイズが(max(t_i)*n)×(max(t_i)*n)なので、O((max(t_i)*n)^3 logT) → 間に合う

5項間漸化式の行列表現

$$
\begin{pmatrix} dp[5] \\ dp[4] \\ dp[3] \\ dp[2] \\ dp[1] \end{pmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} I & O & O & O & O \\ O & I & O & O & O \\ O & O & I & O & O \\ O & O & O & I & O \end{pmatrix}
\end{array}
\times
\begin{pmatrix} dp[4] \\ dp[3] \\ dp[2] \\ dp[1] \\ dp[0] \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} dp[T+4] \\ dp[T+3] \\ dp[T+2] \\ dp[T+1] \\ dp[T] \end{pmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} I & O & O & O & O \\ O & I & O & O & O \\ O & O & I & O & O \\ O & O & O & I & O \end{pmatrix}
\end{array}^{T}
\times
\begin{pmatrix} dp[4] \\ dp[3] \\ dp[2] \\ dp[1] \\ dp[0] \end{pmatrix}
$$

※IはN×Nの単位行列、
OはN×Nの零行列