

XOR に関連した テクニック

M1 TAB

はじめに

- XOR が出てくる問題で典型的な手法・考え方を取り扱います
- このスライドでは XOR の演算子を \oplus とします

本日の流れ

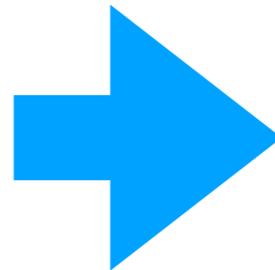
- XOR とは
- XOR の性質
- XOR の問題でよくある考察

XOR って何？

論理演算の一つ

Exclusive or (排他的論理和) の略称

| x | y | $x \oplus y$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



- x と y が等しければ 0
そうでなければ 1
- 2 を法とした足し算
- 繰り上がりを無視した足し算

XOR の性質

1. 単位元が存在

$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$$

2. 結合的

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

3. 任意の元に対して逆元が存在

$$x \oplus x = 0$$

4. 可換

$$x \oplus y = y \oplus x$$

1 ~ 2 を満たす → Segment Tree に乗る

1 ~ 3 を満たす → 累積和 (累積 XOR) に乗る

1 ~ 4 を満たす → Binary Indexed Tree に乗る

bitwise XOR って何？

bit ごとに XOR を取る演算

→ XOR で成り立つ性質が全て成り立つ

以降のスライドでは特に断らない限り

XOR は bitwise XOR の意味で使います

bitwise XOR の性質

- $x + y = (x \oplus y) + 2(x \& y)$
- $(2x) \oplus (2y) = 2(x \oplus y)$
- $(2x) \oplus (2x + 1) = 1$

$$\begin{array}{r} \mathbf{x} \\ 2x = 1??????0 \\ \oplus \\ 2x = 1??????1 \\ \parallel \\ 1 \end{array}$$

XOR の問題

よくある問題の解き方

- bit ごとに解く
- F_2 線形代数
- Binary Trie を使う

bit ごとに解く

ABC 147 - D Xor Sum 4

N 要素の数列 A が与えられる

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} A_i \oplus A_j$$

を $10^9 + 7$ で割ったあまりを求めよ

→ bit ごとに 0 と 1 の個数を数えておいてかける

F_2 線形代数

どんな時に使える??

→ 集合を考える時に使える

例えば

整数の集合 X が与えられる

- X の要素を好きに選んで, XOR をとって作れる要素のうち
最大値を答えよ
- X の要素を好きに選んで, Y を作ることができるか?

Binary Trie

どんな機能がある??

- 整数の追加・削除
- k 番目に大きい (小さい) 要素の検索
- lower_bound, upper_bound
- 追加されている全要素 x を $x \oplus y$ で置き換える