HUPC 2020 Day 1 E 解説

えびちゃん (rsk0315)

2020 年 9 月 14 日

グラフの問題です。以下では、条件「入力のグラフにおいて u–v 間の距離が K 以下であり、かつ文字 c_u と c_v が隣り合っている」を満たすときに無向辺 $\{u, v\}$ を持つグラフ $G = (V, E)$ を考えます。頂点数がたかだか 300 なので、Floyd–Warshall 法などで全頂点対の距離を求められます。`a` と `z` は隣り合うと定義しているので、実装の際は注意しましょう。

さて、重要な考察として、G は二部グラフになっています。これは、`a`, `c`, `e`, ..., `y` と `b`, `d`, `f`, ..., `z` でグループを分けると、同グループ間には辺が張られないことからわかります。

求めたいものは、「頂点の集合 $S \subseteq V$ であって、任意の $\{u, v\} \in E$ に対して $u \in S \vee v \in S$ が成り立つもの」の最小の要素数です。この問題は、**最小頂点被覆問題**と呼ばれています。二部グラフにおいてはこれが**最大マッチング問題**と等価であることが知られており[*1]、これは**最大流問題**[*2]によって解くことができます。ここは典型パートなので、知らなかった人は調べるなり蟻本を読むなりして身につけましょう。

最大流を求めるアルゴリズムは Dinic[*3]法などがあり、これを用いて解くことができます。Dinic 法による二部マッチングの計算量は $O(|E| \cdot \sqrt{|V|})$ 時間であることが知られており、十分高速です。

原案 **tsukasa_diary**

テスター **TAB**, **tsutaj**, **rsk0315**, **monkukui**, **pitsu**

最速 AC **F_flow_G_greedy_H_DP** (11:20)

AC 率 **45** / 190

[*1] Kőnig の定理と呼ばれているようです。また、蟻本にも載っています。
[*2] いわゆるフロー。じゃぶじゃぶ。
[*3] どうやらディニックではなくディニッツらしいですよ。