北大合宿 2019 Day2 H: Revenge of UMG

原案: tempura
問題文: drken
解答: tempura・tsutaj・tubuann・drken
解説: tempura

2019 年 7 月 15 日

問題

Revenge of UMG

- '?', 'U', 'M', 'G' からなる文字列 S が与えられる
- '?' のそれぞれを 'U', 'M', 'G' のいずれかに置き換えて得られる全ての文字列 T について
  - $1 \leq i < j < k \leq |T|$
  - $j - i = k - j$
  - $T_i =$'U' かつ $T_j =$'M' かつ $T_k =$'G'

  となる (i, j, k) の組の数を数えてその合計を 998244353 でわった余りを答えよ。
- 制約
  - $1 \leq |S| \leq 2 \times 10^5$

少し簡単な問題

- とりあえず '?' のない文字列について考える

少し簡単な問題

- とりあえず '?' のない文字列について考える
- 真ん中を固定して考えることにすると、各 j について
  - $i + k = 2j$
  - $i < k$
  - $T_i =$'U' かつ $T_k =$'M'

  をみたす (i, k) の組の数が (高速に) 分かればいい

少し簡単な問題

- ここで、
  - $U[x] = 1(T_x =$'U' のとき),$0(else)$
  - $G[x] = 1(T_x =$'G' のとき),$0(else)$

  と定める

少し簡単な問題

- ここで、
  - $U[x] = 1(T_x =$'U' のとき),$0(else)$
  - $G[x] = 1(T_x =$'G' のとき),$0(else)$

  と定める
- すると、求めたいものは

$$\sum_{i+k=2j, i<k} U[i] \times G[k]$$

少し簡単な問題

- ここで、
  - $U[x] = 1(T_x =$'U' のとき$)$,$0(else)$
  - $G[x] = 1(T_x =$'G' のとき$)$,$0(else)$

  と定める
- すると、求めたいものは

$$\sum_{i+k=2j, i<k} U[i] \times G[k]$$

- 畳み込みっぽい！

さらに簡単な問題

- もし $i < k$ の条件がなければ、
$$\sum_{i+k=2j, i<k} U[i] \times G[k]$$
は、多項式 $U[1]x + U[2]x^2 + \cdots + U[N]x^N$ と $G[1]x + G[2]x^2 + \cdots + G[N]x^N$ の積の x^{2j} の係数

さらに簡単な問題

- もし $i < k$ の条件がなければ、
  $$\sum_{i+k=2j, i<k} U[i] \times G[k]$$
  は、多項式 $U[1]x + U[2]x^2 + \cdots + U[N]x^N$ と $G[1]x + G[2]x^2 + \cdots + G[N]x^N$ の積の x^{2j} の係数
- 多項式の掛け算は FFT(or NTT) で $O(N \log N)$ で計算することができるので解けた

少し簡単な問題

- $i < k$ をみたすものだけを数えるにはどうすればいいか？

少し簡単な問題

- $i < k$ をみたすものだけを数えるにはどうすればいいか？
- もとの多項式のかわりに、
  $U[1]x + U[2]x^2 + \cdots + U[\frac{N}{2}]x^{\frac{N}{2}}$ と
  $G[\frac{N}{2}+1]x^{\frac{N}{2}+1} + G[\frac{N}{2}+2]x^{\frac{N}{2}+2} + \cdots + G[N]x^N$
  の積を考える

少し簡単な問題

- $i < k$ をみたすものだけを数えるにはどうすればいいか？
- もとの多項式のかわりに、
  $U[1]x + U[2]x^2 + \cdots + U[\frac{N}{2}]x^{\frac{N}{2}}$ と
  $G[\frac{N}{2}+1]x^{\frac{N}{2}+1} + G[\frac{N}{2}+2]x^{\frac{N}{2}+2} + \cdots + G[N]x^N$
  の積を考える
- これにより、$1 \leq i \leq \frac{N}{2}$, $\frac{N}{2}+1 \leq k \leq N$ なる (i,k) の組全てについて数えることができる

少し簡単な問題

- あと考慮すべきものは、
  $1 \leq i < k \leq \frac{N}{2}$ と $\frac{N}{2} + 1 \leq i < k \leq N$
  の 2 つ

少し簡単な問題

- あと考慮すべきものは、
  $1 \leq i < k \leq \frac{N}{2}$ と $\frac{N}{2} + 1 \leq i < k \leq N$
  の 2 つ
- これはもとの問題の半分のサイズの問題 $\times 2$

少し簡単な問題

- あと考慮すべきものは、
  $1 \leq i < k \leq \frac{N}{2}$ と $\frac{N}{2} + 1 \leq i < k \leq N$
  の 2 つ
- これはもとの問題の半分のサイズの問題 $\times 2$
- 分割統治のように順々に半分にしていくことで全体で $O(N(\log N)^2)$ で解けた。

もとの問題

- '?' がある場合は？

もとの問題

- '?' がある場合は？
- '?' は'U', 'M', 'G' にそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ でなるとして UMG 数の期待値を計算して、最後に 3^Q 倍すればおっけー
  - $U[x] = 1(S_x =$'U' のとき), $\frac{1}{3}(S_x =$'?' のとき), $0(else)$ にする
  - 各 x^{2j} の係数について、$S_j =$'M' ならそのまま足す、
    $S_j =$'?' なら $\frac{1}{3}$ 倍して足す

Writer 解・統計

- Writer 解
  - tempura (C++・124 行・3151 bytes)
  - tsutaj (C++・111 行・2969 bytes)
  - tubuann (C++・299 行・6971 bytes)
  - drken (C++・122 行・4106 bytes)
- 統計
  - AC / tried: 3 / 17 (17.6%)
  - First AC
    - On-site: – (– min – sec)
    - On-line: The_Way (113 min 40 sec)