xor walk

原案 N_hara

問題文 TAB

データセット・解説 tubuann

余談

最初は木だったんですが, グラフで解けるじゃんってなってグラフになりました.

解説

二部グラフの場合

奇数回通る頂点の集合として, どのような集合が許されるかを考察します.

頂点 S から頂点 G への歩道の長さの偶奇は, 歩道によらず S, G だけで決まります. よって奇数回通る頂点の頂点数の偶奇は S, G によって定まり, これは S, G の距離の偶奇と一致します.

逆にこの偶奇が一致しているなら, 実際にその頂点集合を実現するような歩道が存在することをみていきます. $\cdots \to u \to \cdots$ のようになっているとき, $\cdots \to u \to v \to u \to \cdots$ のようにすることで, 隣合う頂点の組の偶奇を同時にひっくり返すことができます. あとは最初に全ての頂点を含む歩道を考えて, その歩道に今の操作を繰り返すことで, 実際に求める歩道を構築できます.

奇閉路を持つグラフの場合

奇閉路をぐるぐるとまわることで偶奇を調整できるので, 全ての頂点集合を実現可能です.

実際に答えを求めるパート

奇閉路を持つ場合は, ガウスの消去法を使うことで求まります. 二部グラフの場合もだいたい同じです. まず, 偶数個の頂点だけを使う場合に実現できるコストたちのなす空間 W の基底を, $c_1 \oplus c_2, c_1 \oplus c_3 \ldots, c_1 \oplus c_n$ にガウスの消去法を使うことで求めます. あとは, S, G の距離が偶数な

ら W の元の最大値, 奇数なら $c_1 \oplus w$ $(w \in W)$ の最大値を上の bit から貪欲に求めればよいです.

補足：成分に偶数個の 1 を持つベクトルの空間について

$\mathbb{F}_2^n$ は, $n-1$ 本のベクトル $(1,1,0,\dots,0),(1,0,1,0,\dots,0)\dots,(1,0,\dots,0,1)$ の生成する空間 U と, $(1,0,\dots,0)$ の生成する空間 V の直和として表されます. $\mathbb{F}_2^n$ の元 v が偶数個の 1 を持つ必要十分条件は, v を上に並べた n 本のベクトルによる線型結合で表したとき, $(1,0,\dots,0)$ の係数が 0 になることです. またこれは, v が U に含まれることと同値です. 以上で, "実際に答えを求めるパート" で定義した空間 W が $c_1 \oplus c_2, c_1 \oplus c_3 \dots, c_1 \oplus c_n$ で生成されていることがわかりました.

n 頂点の木の接続行列を考えます. 各辺はちょうど 2 個の 1 を成分として持つベクトルと対応しています. 頂点 1 から頂点 i へのパスに含まれる辺のベクトルの和をとると, $(1,0,\dots,0,1,0\dots,0)$ を作ることができます. よって, 接続行列の辺のベクトルたちは U の基底をなします. これが, "二部グラフの場合" で, 頂点集合の大きさと S, G の距離の偶奇が一致しているなら, 隣り合う頂点の偶奇をひっくり返すことを続けてその頂点集合を実現できることの証明です.