D:Successive Tree　解説

原案、解説：N_hara

Tester:N_hara,TAB,pitsu,tubuann

問題概要

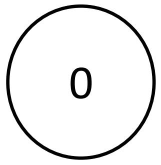
頂点$0,1,\ldots,T$ の $T+1$ 頂点からなる木が与えられます。
この木から等確率でランダムに頂点 v を選んだ時、
頂点 vと頂点 0 の最短経路長の期待値を求めて下さい。

ただし、この木の i $(1 \leq i \leq T)$ 番目の辺は
頂点 u_i と頂点 i を結びます。
また、u_i は $0,\ldots,i-1$ から等確率でランダムに選ばれた
整数です。

例（$T = 2$ の場合）

無向グラフG

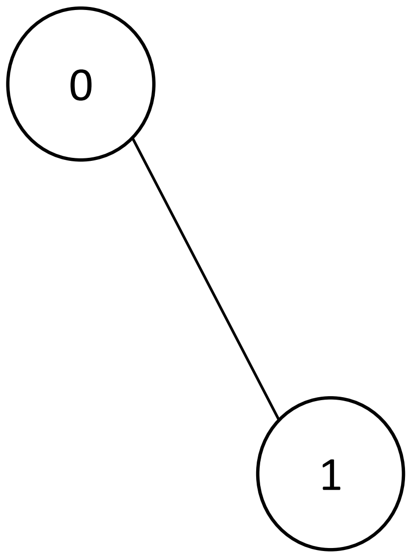
操作前の状態



例（$T = 2$ の場合）

無向グラフG

1 回目の操作後



例（$T = 2$ の場合）

無向グラフG

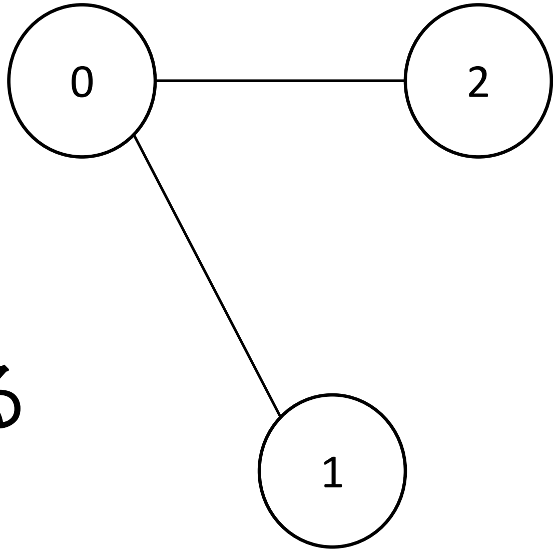
2 回目の操作後

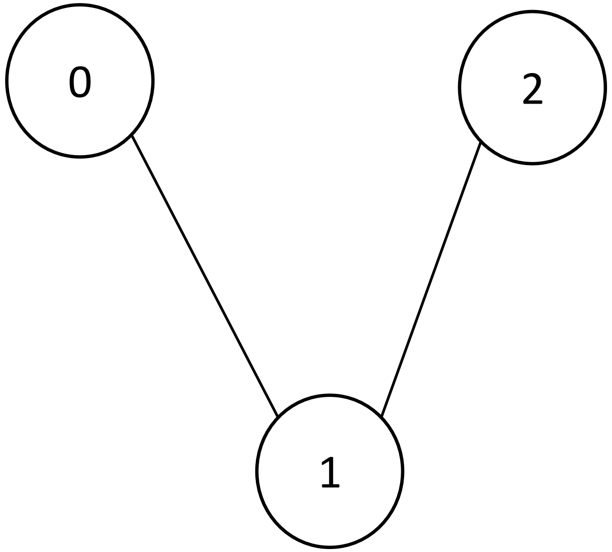
（このとき、木は

2 パターンあり、

それぞれの木ができる

確率は $\frac{1}{2}$ です。）





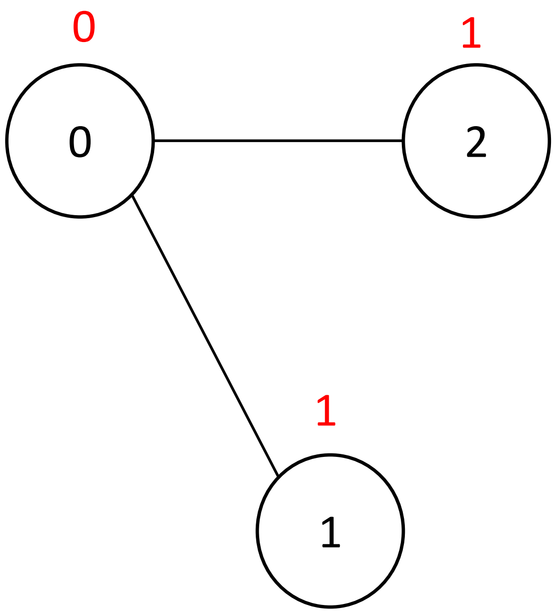
例（$T = 2$ の場合）

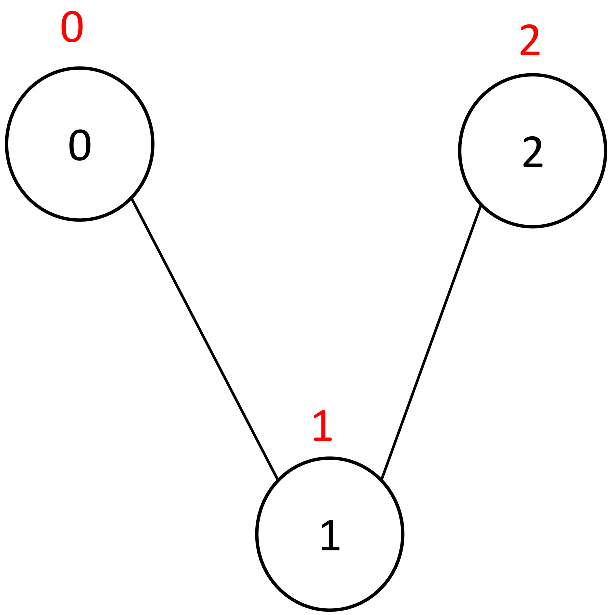
無向グラフG

2 回目の操作後

各頂点と、

頂点 0 との距離





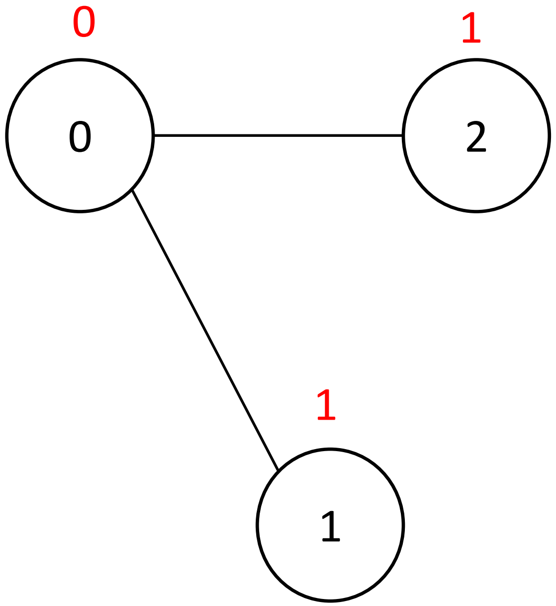
例（$T=2$ の場合）

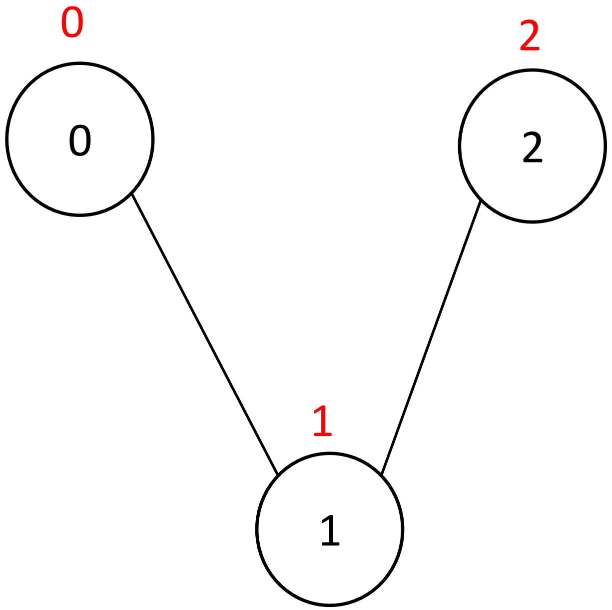
無向グラフG

2 回目の操作後

各頂点と、

頂点 0 との距離





求める期待値は、$\dfrac{0+1+1+0+1+2}{6}=\dfrac{5}{6}$

解法

$T=k$ のときの答え(期待値)を E_k とおくと

$$E_k = E_{k-1} + \frac{1}{k+1} (k \geq 1), E_0 = 0$$

が成り立つので、$E_1, \dots, E_T$ を順に求めればよいです。

以下、この漸化式が成立することを証明します。

解法

証明：

$E_1 = 0$ であることは、明らかです。

$T = k(\geq 1)$ のときグラフ G には頂点が $(k+1)$ 個あります。

これにより、最後に頂点 $0,1,\ldots,k$ が選ばれる確率はそれぞれ

$\frac{1}{k+1}$ となります。

解法

$T=k(\geq 1)$ のとき、それぞれの頂点を選んだ場合の

頂点 0 からの距離の期待値 E' を考えると、

[1] 頂点 $0,\ldots,k-1$ を選んだ場合：

$T=k-1$ のときと同じなので、 $E'=E_{k-1}$

[2] 頂点 k を選んだ場合：

（頂点 k と直接辺で結ばれている頂点における頂点 0 からの

距離の期待値）+1 より、 $E'=E_{k-1}+1$

となります。

解法

[1] が起こる確率が $\frac{k}{k+1}$ 、[2] が起こる確率が $\frac{1}{k+1}$ なので、

$$E_k = \frac{k}{k+1} E_{k-1} + \frac{1}{k+1}(E_{k-1} + 1) = E_{k-1} + \frac{1}{k+1}$$

この式に沿って $E_1, \ldots, E_T$ を順に計算することで答えが求められます。

$2^{-1}, 3^{-1}, \ldots (T+1)^{-1} (\mathrm{mod}\, p)$ の値をそれぞれ $O(\log p)$の計算量で求めた場合、全体の計算量は $O(T \log p)$ です。

（本問題では、$p = 998244353$ です。）

補足 1

「すべての木に対する期待値の和を求め、
木のパターン数で割る」という方法でも求められます。

求め方：
$T = k$ のときの、すべてのパターン（木、最後に選んだ頂点）
に対する頂点 0 からの距離の和を S_k とおくと

$$S_k = (k+1)S_{k-1} + k!\ (k \geq 1), S_0 = 0$$

補足 1

前ページの式は、実は解法 1 で証明した漸化式の両辺に $(k+1)!$ を掛けたものに等しいです。

これは、$T = k$ 回の操作後
におけるパターン(木、最後に選んだ頂点の組み合わせ)
が $(k+1)!$ 通りであることから考えられます。

補足 2

この問題は、$O(T)$ の計算量でも解けます。

これは、$1^{-1}, 2^{-1}, \ldots k^{-1} (\mathrm{mod}\, p)$ (p は素数、$1 \leq k < p$)

を$O(k)$ の計算量で求める方法を用いて達成できます。

参考 : 競プロでよく使う二項係数(nCk)を素数(p)で割った余りの計算と逆元のまとめ | アルゴリズムロジック

https://algo-logic.info/combination/#toc_id_1_1

補足2

求め方：

$inv[i] = i^{-1} (\mathrm{mod}\, p)$ $(i = 1, \ldots, j-1)$ とします。このとき、

$inv[j] = -inv[p\%j] \times \left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor (\mathrm{mod}\, p)$ が成り立ちます。

$inv[1] = 1$ であることから、$j = 2, 3, \ldots, k$ の順で

上の式に沿って $inv[j]$ を求めることで目的を達成できます。

$\lfloor a \rfloor$：a を超えない最大の整数

$a\%b$：a を b で割ったあまり

補足 2

$inv[j] = -inv[p\%j] \times \left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor \pmod p$ について

p に関しての除算より

$$p = \left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor \times j + p\%j$$

$\bmod p$上でみると

$$0 = \left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor \times j + p\%j \pmod p$$

$$p\%j = -\left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor \times j \pmod p$$

補足 2

$$p\%j = -\left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor \times j \pmod{p}$$

両辺に $j^{-1}(p\%j)^{-1} \pmod{p}$ をかけると

$$j^{-1} = -(p\%j)^{-1} \times \left\lfloor \frac{p}{j} \right\rfloor \pmod{p}$$

j^{-1} を $inv[j]$ に、 $(p\%j)^{-1}$ を $inv[p\%j]$ に置き換えることで

漸化式を導出できます。