会津合宿 2017 Day3
D - 優柔不断 -

原案：瀧澤
問題文：瀧澤
解答：瀧澤、鈴木
解説：鈴木

2017/09/20

D 問題の D は DP の D なので解法は DP

※ Dijkstra の D という説も有力

問題概要

特殊なナップサック問題

- N 個のアイテムと予算 C がある
- 各アイテム i は 2 種類の価値 a_i, b_i と費用 c_i を持つ
- a_i と b_i の値は交換しても良い
- 予算内でアイテムを選択し，a 側の価値総和を A,b 側の価値総和を B としたとき，$\min\{A, B\}$ を最大化せよ

制約

- $1 \leq N \leq 100, 1 \leq C \leq 100$
- $1 \leq b_i < a_i \leq 100, 1 \leq c_i \leq 100$

誤解法例 1

- 全探索
  - 考えうる組合せをすべて探索
  - 取る/取らないの他に価値の交換も考えると,1 アイテムあたり 3 分岐
  - $O(3^N)$ はさすがに TLE

誤解法例 2

- 考えうる価値の組を動的計画法で求める
  - $dp[i][A][B]$ = アイテム i までで，価値総和の組が (A, B) となるときの最小費用
    - 更新式

$$dp[i][A][B] = \min \begin{cases} dp[i-1][A][B] & i \text{ を使わない} \\ dp[i-1][A-a_i][B-b_i] + c_i & a_i, b_i \text{ を交換せずに使う} \\ dp[i-1][A-b_i][A-a_i] + c_i & a_i, b_i \text{ を交換して使う} \end{cases}$$

  - $dp[N][A][B] \leq C$ ならば, 組 (A, B) はありえる
  - 雑に見積もって $O(N(\sum_{i=1}^{N} a_i)^2)$ となるが残念ながら TLE

考察

- A に対して，B の候補として X, Y があり $X < Y$ のとき
- 価値の組 (A, X) よりも，(A, Y) の方が有力である
  - $\min\{A, X\} \leq \min\{A, Y\}$ だから
- よって，A が固定されたとき，B の取りうる値の中で最大値にだけ着目すれば十分である

想定解法

以下のような動的計画法

- $dp[i][x][A]$ = アイテム i までで，予算 x で価値総和 A を達成するときの価値総和 B の最大値
- 更新式は

$$dp[i][x][A] = \max \begin{cases} dp[i-1][x][A] & i \text{ を使わない} \\ dp[i-1][x-c_i][A-a_i]+b_i & a_i, b_i \text{ を交換せずに使う} \\ dp[i-1][x-c_i][A-b_i]+a_i & a_i, b_i \text{ を交換して使う} \end{cases}$$

- $0 \le x \le C, 0 \le A \le \sum_{i=1}^{N} a_i$ の範囲で $\min\{A, dp[N][x][A]\}$ を調べる
- 実は a_i, b_i が交換可能であることは問題の本質ではない
- 計算量は $O(NC\sum_{i=1}^{N} a_i)$ で，これは間に合う

おまけ

多目的最適化

- 目的関数（本問では価値）が複数ある最適化問題を多目的最適化問題という
  - 最適性の定義が特殊：他の各解に対して，劣らない目的関数値が存在すれば良い
  - 目的関数値が異なる複数の解が最適性を持ちうる
- 本問は多目的ナップサック問題の 2 目的かつ価値交換可能という変種版
  - 上記の最適性を持つ解のうち、さらに条件を加えた解を要求している
- 想定解法の DP でなくても，多目的最適化用のアルゴリズムでうまく解けるかもしれません
  - (今のところは) 競プロの範疇ではないと思うので，深くは触れません

Writer 解

- 瀧澤 (C++, 50 行)
- 鈴木 (C++, 39 行) (Java, 40 行)

提出状況

First AC

- Onsite : ACPC_remonKTC7 (31 min)
- Online : hamayanhamayan (13 min)

正答率

23 / 56 (41.07%)