G:最小包含矩形
-Minimum Enclosing Rectangle-

原案:井上

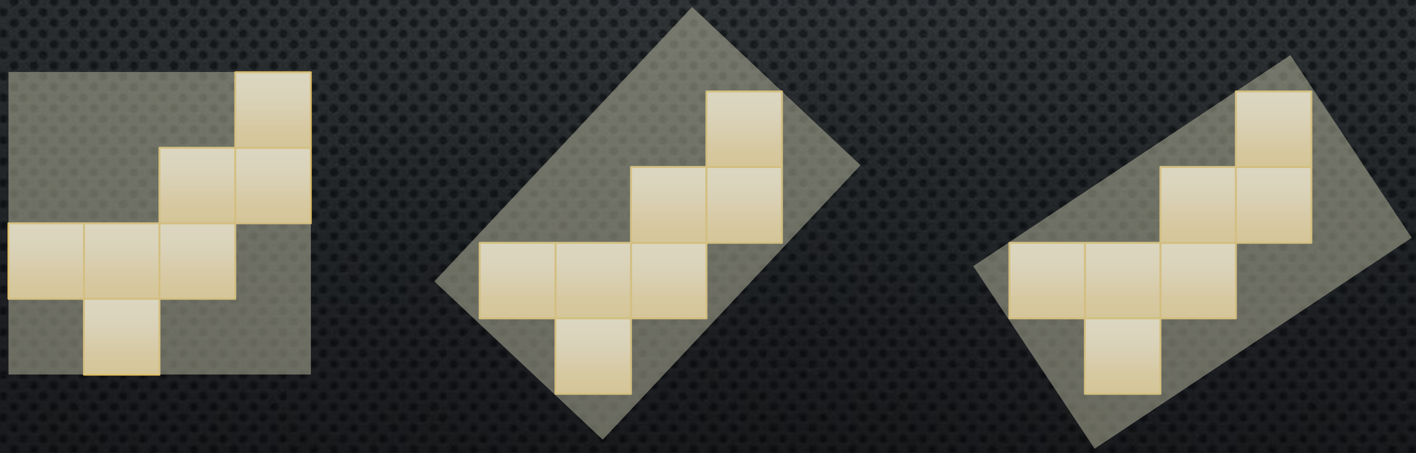
問題文:中野

解説:鈴木

解答:鈴木、田中、中野

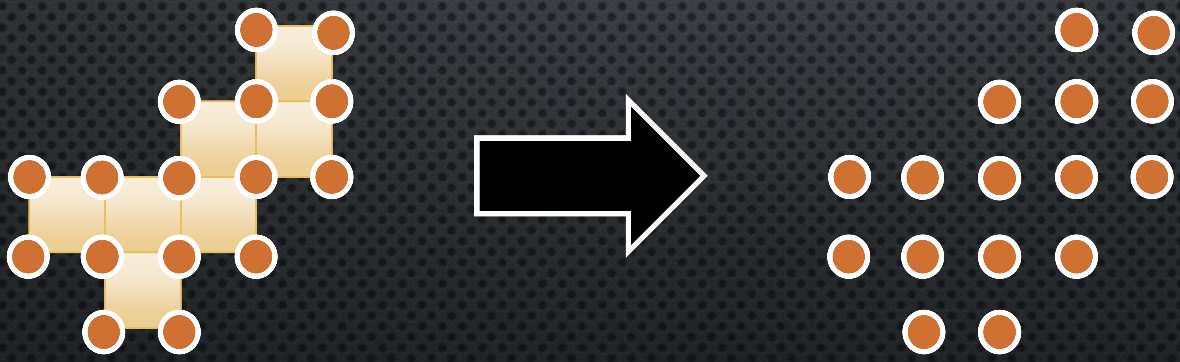
問題概要

- 1×1の正方形パネルを上下左右にN個繋げた図形が与えられる
- 与えられた図形を包含する矩形のうち、面積が最小となるものの面積を求めよ



問題を噛み砕いて言うと

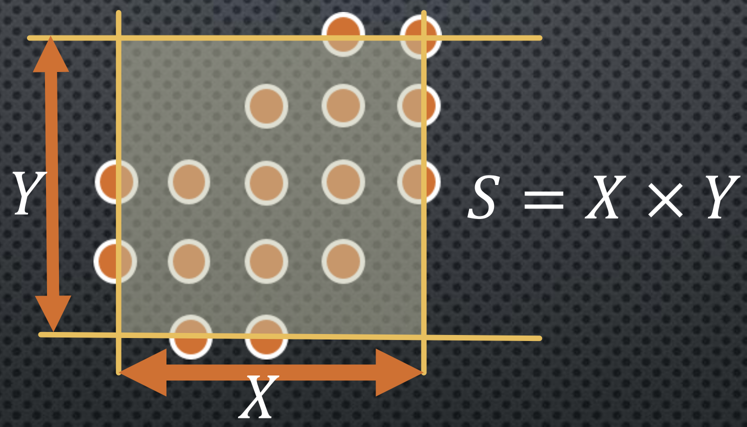
- 2次元平面上に与えられた$O(N)$個の点を全て包含する矩形のうち、面積最小となるものの面積を求めよ



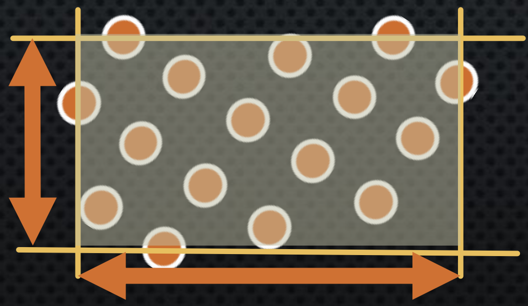
与えられた図形は$O(N)$個の点で表せる

方針

- 軸に平行な包含矩形の面積は点集合のx軸方向の幅とy軸方向の幅の積



- 回転すると面積が変化することを利用する



- ある回転角で面積最小、つまり解
- 結局、どのように回転角をとるかを考える問題になる

実はこんな定理がある

- 凸多角形を包含する最小面積の矩形のある一辺は、多角形のある一辺と並行になる
  - 出典:H. Freedman and R. Shapira, “Determining the minimum-area encasing rectangle for an arbitrary closed curve”, Comm. A.C.M., Vol. 18, July 1975, pp.409-413

- 突然の凸
  - シャレのつもりではない

察するべきこと

- 点集合を包含するならば、その凸包を包含している

- 凸包を取ろう！ ⇒ 蟻本

凸包を用いて回転角を決める

- 各辺を軸に平行にしたときの回転角を試す

- いずれかの場合で面積が最小になる

解法のまとめと計算量

- 凸包を取る　$O(N \log N)$
- 凸包の各辺を試す $O(\sqrt{N})$
  - 回転して座標の幅を取る　$O(\sqrt{N})$
  - 最小面積の更新　$O(1)$

- 全体で$O(N \log N)$である

- 座標値の幅がMであり、整数座標で表される点集合で凸包を取ると$O(\sqrt{M})$個の点が残る
- 今回は$M \leq N$だから凸包の点の数、辺の数が$O(\sqrt{N})$個

Writer解

- 田中（C++）: 83行, 2237 byte
- 鈴木（C++）: 112行, 3353 byte
- 中野（Java BigDecimal使用）: 110行, 3436 byte

解答状況

- Accept / Submit (rate)
  - 9 / 42 (21.4%)
- First Accept
  - Online : logicmachine (00:23)
  - Onsite : energy_star (02:53)